ČÍSELNÉ MNOŽINY

Základní pojmy:

- Číselné obory a vztahy mezi nimi
- Zákony pro počítání s číselnými množinami

1. **Přirozená čísla** vyjadřují počet prvků množiny
   ***N*= {** **}**
2. **Celá čísla** změna počtu prvků dané množiny, přírůstky a úbytky
   ***Z* = {** **}**
3. **Racionální čísla** počet dílů určitého celku
   všechna čísla se dají vyjádřit ve tvaru zlomku
   ***Q* = {** **}**

   všechna čísla periodická

Zapište jako zlomek:

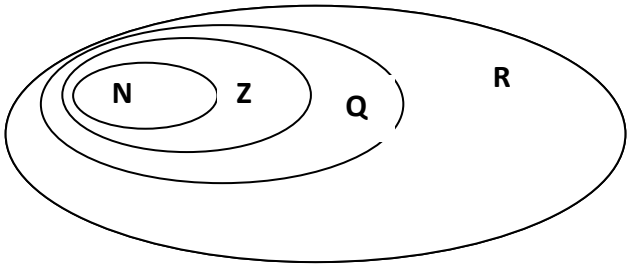
x.....$3,\overline{5}$ / .10 $\qquad 3,\overline{43} \qquad 1,2\overline{3}$

$10x$.....$35,\overline{5}$

$9x = 32 / : 9$

$x = \frac{32}{9}$

4. **Iracionální čísla** nedají se zapsat ve tvaru zlomku
   ***I* = {** **}**
5. **Reálná čísla** umožňují vyjádřit výsledky objemů, fyzikálních stavů těles a jejich změny
   celá číselná osa
   $\boldsymbol{R = Q \cup I}$
6. **Komplexní čísla** C - jsou čísla reálná a čísla imaginární, která slouží k vyjádření odmocnin ze záporných čísel



Nejčastěji se řeší příklady v oboru reálných čísel.

Obecné zákony pro reálná čísla:

- Komutativní zákon: $a + b = b + a$
  $a . b = b . a$
- Asociativní zákon: $(a + b) + c = a + (b + c)$
  $(a . b) . c = a . (b . c)$
- Distributivní zákon: $a . (b + c) = a . b + a . c$
  $a . b + a . c = a . (b + c)$
- Čísla opačná: $a + (-a) = 0$
- Čísla převrácená: $a . 1/a = 1$

Další značení:

R^+ .....kladná reálná čísla $a > 0$
R_0^+ ..... $a \geq 0$
R^- .....záporná reálná čísla $a < 0$
R_0^- ..... $a \leq 0$

Znaky dělitelnosti:

2 …

3 …

4 …

5 …

6 …

8 …

9 …

10 …

11 … rozdíl součtu cifer na sudých místech a lichých místech je dělitelný jedenácti nebo roven nule.

Příklady na procvičení:

1. Vypočti: 5.987.2 = 3.6979+7.6979 = 429-185+250+321-715 =

2. Vypiš prvočísla od 1 do 50

3. Rozlož na prvočinitele
   195 = 520 = 246 =

4. Urči nejmenší společný násobek čísel
   n (3,4,8) = n(48,12)= n(6,12,32)=

5. Urči nejmenší společný násobek čísel
   n (175,1505) =

6. Nejmenší společný násobek čísel 18, 20, 24 a *m* je 720. Určete nejmenší číslo *m* splňující tuto podmínku.

7. Urči největšího společného dělitele čísel
   D (28,175,1505) = D (192,336,288) =

8. Tajná zpráva má méně než 3 000 znaků. Lze jí odeslat buď jako sedm depeší se stejným počtem znaků, nebo jako osm depeší se stejným počtem znaků, nebo jako devět depeší se stejným počtem znaků, nebo jako deset depeší se stejným počtem znaků. Počet znaků zprávy je:
   A/ 2 040 B/ 1 260 C/ 840 D/ 2 520 E/ 1 680

9. Ve výsledku násobení 333 333 333. 123 456 789 = 41 152 26* 958 847 73* jsou dvě číslice nahrazeny hvězdičkami. Kterou číslici nahrazuje první hvězdička zleva?

10. Vypočti 3-(-7)-1-(-7-1) =

    $(-1)^2.(-1)^3-1^2 =$

11. 1 hodina a 40 minut je:
    A/ $\frac{5}{72}$ dne B/ $\frac{3}{52}$ dne C/ $\frac{5}{48}$ dne D/ $\frac{2}{45}$ dne E/ $\frac{5}{42}$ dne

12. Uspořádej vzestupně podle velikosti $\frac{13}{6}$ $\frac{41}{19}$ 2,16

13. Vzestupné uspořádání čísel $2{,}4\overline{49}$, $2{,}449$, $2{,}44\overline{9}$, $2{,}\overline{449}$, $\sqrt{6}$ je:

A/ $2{,}4\overline{49} < 2{,}449 < 2{,}\overline{449} < 2{,}44\overline{9} < \sqrt{6}$

B/ $2{,}449 < 2{,}\overline{449} < \sqrt{6} < 2{,}4\overline{49} < 2{,}44\overline{9}$

C/ $2{,}449 < 2{,}44\overline{9} < 2{,}\overline{449} < \sqrt{6} < 2{,}4\overline{49}$

D/ $2{,}\overline{449} < \sqrt{6} < 2{,}449 < 2{,}4\overline{49} < 2{,}44\overline{9}$

E/ $2{,}449 < 2{,}\overline{499} < 2{,}4\overline{49} < \sqrt{6} < 2{,}44\overline{9}$

14. Zapiš v základním tvaru $\frac{121}{297} =$ $\frac{-184}{69} =$ $\frac{-204}{-170} =$

15. Předpokládejme, že a je číslice desítkové soustavy. Číslo $2a31a$ je dělitelné třemi právě tehdy, když a je:

A/ 3, nebo 9 B/ 3 C/ 2, nebo 5, nebo 8 D/ z množiny {0, 3, 6, 9} E/ z množiny {3, 6, 9}

16. Vypočti:

$$\left(1\frac{2}{3} - 5\frac{3}{4}\right) : 2\frac{5}{8} =$$

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{14} : \left(-\frac{12}{7}\right) =$$

$$\frac{1}{4} : \left[1\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right] =$$

OPAKOVÁNÍ ZE ZŠ – NAJDI VÝROK

1) Průměrná hmotnost dvou melounů je 2,4 kg, průměrná hmotnost jiných tří melounů je 2,8 kg. Průměrná hmotnost všech pěti melounů je:
A/ 2,56 kg **FOR** B/ 2,60 kg **TU** C/ 2,64 kg **ER** D/ 2,68 kg **ERB** E/ 2,72 kg **FO**

2) Které z následujících tvrzení platí?
A/ Součet dvou lichých čísel a jednoho sudého čísla je číslo liché. **RI**
B/ Součet tří lichých čísel je číslo sudé. **TI**
C/ Součet druhé mocniny lichého čísla a dvojnásobku sudého čísla je číslo sudé. **NI**
D/ Součin sudého čísla a druhé mocniny lichého čísla je číslo liché. **TA**
E/ Součin dvou lichých čísel je číslo liché. **RA**

3) Výbor má méně než 18 členů. Dvě třetiny členů výboru obsadí tři čtvrtiny židlí v místnosti. Počet členů výboru je:
A/ 3 **S** B/ 6 **T** C/ 9 **RE** D/ 12 **RET** E/15 **L**

4) Ve výrazu - 328 + 597 – 486 -745 + 953 lze změnit jedno z pěti znamének na opačné tak, aby hodnota nového výrazu byla 1 481. Jde o znaménko před číslem:
A/ 328 **TO** B/ 597 **FO** C/ 486 **NU** D/ 745 **HU** E/ 953 **MU**

5) Nůž soustruhu se posouvá rychlostí 0,2 mm za jednu otáčku. Soustruh vykonává 90 otáček za minutu. Soustružení tyče dlouhé 1,2 m bude trvat:
A/ 100min **RTU** B/ 66min 40s **MA** C/ 1h 6min **NA** D/ 3 980s **STU**

6) Nejmenší přirozené číslo m, pro které je hodnota výrazu $m\times\left(-\frac{3}{5}+\frac{5}{12}-\frac{1}{15}+\frac{7}{20}-\frac{1}{60}\right)$ rovna celému číslu, je:
A/ m = 5 **NAM** B/ m = 12 **NUM** C/ m = 15 **TA** D/ m = 20 **LA** E/ m = 60 **NA**

7) Na trhu byly dva stánky s borůvkami. U prvního stánku stál 1 litr borůvek 40 Kč, u druhého 1 kg borůvek 60 Kč. Hmotnost 1 litru borůvek je 650 g. 1 kg borůvek byl:
A/ u prvního stánku levnější asi o 3 Kč. **PES**
B/ u druhého stánku levnější asi o 3 Kč. **JES**
C/ u prvního stánku levnější asi o 1,50 Kč. **PE**
D/ u druhého stánku levnější asi o 1,50 Kč. **ES**
E/ stejně drahý u obou stánků. **NES**

8) Tři společně podnikající kamarádi dostali za vykonanou práci 95 000 Kč, z čehož odvedli 15 % daň a 20 000 Kč zaplatili za materiál. Zbytek peněz si podle počtu odpracovaných dní rozdělili v poměru 2 : 3 : 4. Byly to částky:
A/ 14 400 Kč, 21 600 Kč, 28 800 Kč. **NA.**
B/ 13 500 Kč, 20 250 Kč, 27 000 Kč. **T.**
C/ 15 180 Kč, 20 250 Kč, 30 750 Kč. **TA.**
D/ 16 180 Kč, 21 580 Kč, 32 370 Kč. **LA.**

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
TAJENKA:								

MNOŽINY

Základní pojmy:

- Množina, podmnožina
- Množinové operace – rovnost, doplněk, průnik, sjednocení a rozdíl množin

Opakování:

1. Číselné množiny

Množina: souhrn předmětů – prvky množiny, které mají určitou společnou vlastnost

$a \in A$ ..... a je prvkem mn. A

$a \notin A$ ..... a není prvkem mn. A

Určení množiny: výčtem prvků ..... $A = \{1,2,3,4\}$

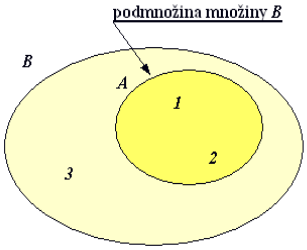
charakteristickou vlastností..... $A = \{x \in N; x < 5\}$

množinovými operacemi

a) Podmnožina množiny: $A \subset B$

$A \subset A$

$\emptyset \subset A$

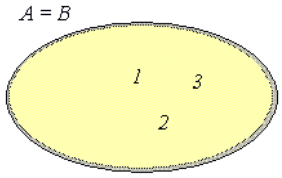


$A = \{1,2\}$

$B = \{1,2,3\}$

b) Rovnost množin: $A = B$

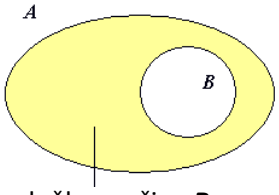
$A \subset B$ a $B \subset A$



$A = \{1,2,3\}$

$B = \{1,2,3\}$

c) Doplněk množiny:



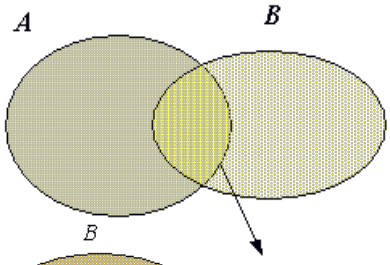
B´ **-** doplněk množiny ***B*** v množině ***A***

$A = \{-1,0,1,2,3\}$

$B = \{1,2\}$

$B'_A =$

d) Průnik množin:

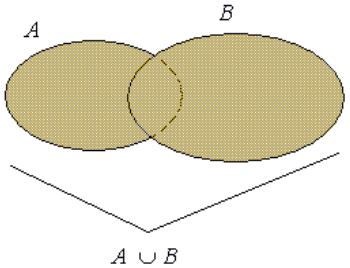


$A = \{-1,0,1,2,3\}$

$B = \{1,2,4\}$

$A \cap B =$

e) Sjednocení množin:

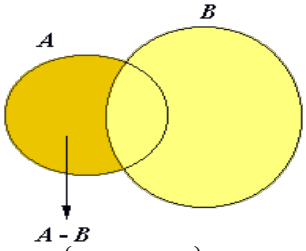


$A = \{-1,0,1,2,3\}$

$B = \{1,2,4\}$

$A \cup B =$

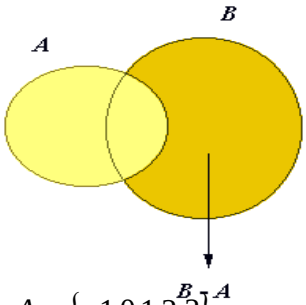
f) Rozdíl množin:



$A = \{-1,0,1,2,3\}$

$B = \{1,2,4\}$

$A - B =$



$A = \{-1,0,1,2,3\}$

$B = \{1,2,4\}$

$B - A =$

Příklady:

a) Jsou dány množiny A, B, C, určete:

$A = \{-1,0,2,5,7\}, B = \{-2,2,7,9\}, C = N$

$A \cap B =$

$A \cup B =$

$A - B =$

$B - A =$

$B \cap C =$

$B \cup C =$

$B - C =$

$C - B =$

$A'_C =$

$A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{a,c\}$, $C = \{b,d,e\}$

$A \cap B =$

$A \cap C =$

$B \cap C =$

$A \cup B =$

$A \cup C =$

$B \cup C =$

$A - B =$

$B'_A =$

b) Určete výčtem prvků množiny:

A = {$x \in$ Z; - 3 < $x \leq$ 2}=

B = {$x \in$ R; x^2 - 4 = 0}=

C = {$x \in$ Z; x + 3 > 0}=

Poté určete:

A ∩ B=

B ∩ C=

A ∪ C=

A – B=

A ∩ C=

A ∪ B=

B ∪ C=

C – B=

c) Určete výčtem prvků množiny:

D = {$x \in$ Z; - 3 < x< 4}=

E = {$x \in$ N; x\12}=

d) Urči charakteristickou vlastností

F = {*2,4,6,8,…*}=

G = {*1,3,5,7,…*}=

Test:

1. **Které z následujících čísel nepatří do množiny racionálních čísel?**
   a) 3/7
   b) druhá odmocnina z čísla 4
   c) druhá odmocnina z čísla 2
   d) druhá mocnina čísla 3

2. **Kterým symbolem značíme množinu všech racionálních čísel?**
   a) M b) N c) Q d) R

3. **Kterým symbolem značíme množinu všech přirozených čísel?**
   a) M b) N c) Q d) R

4. **Čemu je roven průnik nekonečné množiny A a prázdné množiny B**
   a) libovolná nekonečná množina
   b) nekonečná množina A
   c) prázdná množina
   d) množina C, jejímiž prvky jsou A a B

5. **Čemu je rovno sjednocení nekonečné množiny A a prázdné množiny B**
   a) libovolná nekonečná množina
   b) nekonečná množina A
   c) prázdná množina
   d) množina C, jejímiž prvky jsou A a B

6. **Co je větší - množina přirozených čísel nebo množina reálných čísel?**
   a) množina přirozených čísel
   b) množina reálných čísel
   c) jsou stejně velké
   d) nelze rozhodnout

7. **Jsou dány množiny A={1,2,3} a B={2,3,4}. Určete množinu C, jeli C=A-B**
   a) C={1,2,3}
   b) C={2,3,4}
   c) C={4}
   d) C={1}

8. **Které z následujících čísel není komplexním číslem?**
   a) 1+i
   b) 1
   c) I
   d) žádná z možností

INTERVALY, ABSOLUTNÍ HODNOTA

Základní pojmy:

- Interval, dělení intervalů
- Definice absolutní hodnoty, vlastnosti absolutní hodnoty

Opakování:

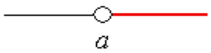
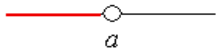
- Číselné množiny, zobrazení čísel na reálné ose, množinové operace

Interval: podmnožina reálných čísel

Druhy intervalů: OMEZENÉ – *a* – *dolní* mez, *b* – horní mez

Množina	Její znázornění na ose	Její zápis jako intervalu	Název intervalu
$\{x \in R;\ a \le x \le b\}$		$\langle a\,;b\rangle$	uzavřený interval $a\,,b$
$\{x \in R;\ a < x \le b\}$		$(a\,;b\rangle$	polouzavřený interval $a\,,b$ zleva otevřený a zprava uzavřený
$\{x \in R;\ a \le x < b\}$		$\langle a\,;b)$	polouzavřený interval $a\,,b$ zleva uzavřený a zprava otevřený
$\{x \in R;\ a < x < b\}$		$(a\,;b)$	otevřený interval $a\,,b$

NEOMEZENÉ – krajní mez je $\pm\infty$

Množina	Její znázornění na ose	Její zápis jako intervalu	Název intervalu
$\{x \in R;\ x \ge a\}$		$\langle a\,;+\infty)$	zleva uzavřený od *a* do *plus nekonečna*
$\{x \in R;\ x > a\}$		$(a\,;+\infty)$	zleva otevřený od *a* do *plus nekonečna*
$\{x \in R;\ x \le a\}$		$(-\infty\,;a\rangle$	zprava uzavřený od *minus nekonečna* do *a*
$\{x \in R;\ x < a\}$		$(-\infty\,;a)$	zprava otevřený od *minus nekonečna* do *a*

Absolutní hodnota: vždy kladné číslo

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{pokud } a \geq 0 \\ -a, & \text{pokud } a < 0 \end{cases}$$

Vlastnosti absolutní hodnoty:

$|a| \geq 0$

$|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

$|a| = |-a|$

$\sqrt{a^2} = |a|$

$|a.b| = |a|.|b|$

$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

1. Vypočti:

$|18| + |-12| - |-5| + |21| =$

$|-4| - |-16| - |+6| - |-27| =$

$|-4|.|-12| + |+6| : |-3| =$

$|\sqrt{3} - 1| =$

$|3 - \pi| =$

$|\sqrt{2} - 2| =$

$$\frac{|\sqrt{3} - 2| + |1 - \sqrt{3}|}{|1 - \sqrt{2}| - |-2 + \sqrt{2}|} =$$

$$\frac{|3 - \sqrt{3}| + |\sqrt{3} - 3|}{|2 - \sqrt{2}|.2 - |\sqrt{2} - 2|} =$$

$$\frac{|5 - \sqrt{5}| + |1 - \sqrt{5}|}{|2 - \sqrt{3}| - |3 - \sqrt{3}|} =$$

2. Vypočti pro x > 0:

$|x| - |-2x| =$

$|-x| + x + |x| =$

$-|-5x| - 2x + |-x| =$

Vypočti pro x < 0:

$|x| - |-2x| =$

$|-x| + x + |x| =$

$-|-5x| - 2x + |-x| =$

3. Odstraň absolutní hodnoty pomocí definice a vypočti:

$a > 0$

$|-a| + 2a - |-a| + |3a| =$

$a - |3a| + |-2a| =$

$a < 0$

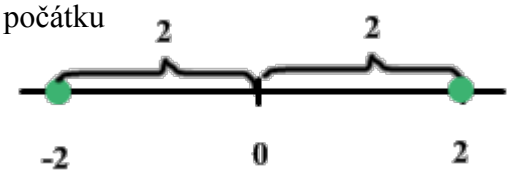
$|-a| - 2a + |2a| =$

$|a| - |2a| + |-3a| =$

Znázornění na číselné ose: absolutní hodna reálného čísla je rovna vzdálenosti tohoto čísla na číselné ose od počátku

$|x| = 2$

$x = \pm 2$

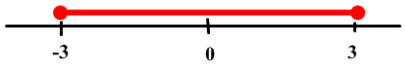


$|x| = 0$ $x = 0$ počátek

$|x| = -3$ **nelze!!**

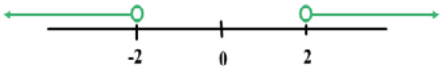
- je-li rovnost – body
- je-li nerovnost - intervaly

$A = \{x \in R, |x| \leq 3\}$



$x \in \langle -3, 3 \rangle$

$B = \{x \in R, |x| > 2\}$



$x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

$C = \{x \in R, |x+3| = 2\} =$

$D = \{x \in R, |x+3| \geq 2\} =$

$E = \{x \in R, |x+3| < 2\} =$

4. Znázorni na číselné ose:

$|x-2| = 3$

$|x+1| = 2$

$|2-x| = 3$

5. Zapiš množiny pomocí intervalů a znázorni na číselné ose:

$A = R$

$B = \{x \in R, x > 8\}$

$C = \{x \in R, x \leq 3\}$

$D = \{x \in R, 3 < x \leq 7\}$

$E = \{x \in R, |x| < 3\}$

$F = \{x \in R, |x| \geq 2\}$

6. Jsou dány intervaly I_1, I_2. Zapiš a znázorni na číselné ose sjednocení a průnik intervalů.

$I_1 = \langle -2, 3), I_2 = \langle 0, 4 \rangle$

7. Jsou dány intervaly: Urči $P_1 = \langle 4, \infty), P_2 = (-\infty, 7)$

$P_1' =$

$P_2' =$

$(P_1 \cup P_2)' =$

$(P_1 \cap P_2)' =$

$I_1 = \{x \in R, 1 \leq x \leq 3\}$

$I_2 = \{x \in R, |x-1| < 2\}$

$I_3 = \{x \in R, |x+2| \leq 2\}$

$I_4 = \{x \in R, |x-3| > 2\}$

$I_5 = \{x \in R, |x+2| \geq 3\}$

$I_6 = \{x \in R, |3-x| < 1\}$

$I_7 = \{x \in R, 1 < |x| \leq 3\}$

$I_8 = \{x \in R, 2 \leq |x+2| < 4\}$

$I_9 = \{x \in N, x < 5\}$

$I_{10} = \{x \in R, |x-1| \geq 3\}$

$I_{11} = \{x \in R, |x+2| \leq 0\}$

$I_{12} = \{x \in R, 1 \leq |x+2|\}$

$I_{13} = \{x \in R, x < 0\}$

$I_{14} = \{x \in Z, |x+2| \leq 5\}$

$I_{15} = \{x \in R, |x+1| = 3\}$

VÝROKOVÁ LOGIKA

Základní pojmy:

- Výrok, pravdivostní hodnota
- Negace, logické operace, tabulka pravdivostních hodnot

Výrok: oznamovací věta, u které je možno rozhodnout o její pravdivosti

- **Pravdivostní hodnota: p.h.** pravda ..... p.h.=
  nepravda..... p.h.=
- příklady výroků:

Operace s výroky:

- pracujeme se 2 výroky A: Venku prší
  B: Venku je teplo
- *NEGACE* – popření pravdivosti výroku..... A' .....
- *KONJUNKCE* - **současně** $A \wedge B$.....
  $(A \wedge B)' =$
- *DISJUNKCE* – **nebo** $A \vee B$ .....
  $(A \vee B)' =$
- *IMPLIKACE* – **z A plyne B** $A \Rightarrow B$.....
  $(A \Rightarrow B)' =$
- *EKVIVALENCE* – **A právě tehdy, když B** $A \Leftrightarrow B$.....
  $(A \Leftrightarrow B)' =$

Tabulka pravdivostních hodnot:

A	B	A'	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Tautologie – výrok, který je vždy pravdivý

- Určete, zda se jedná o tautologii: ..... $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A' \vee B$

A	B	

Kvantifikátory:

1. Množství v českém jazyce vyjadřujeme mnoha způsoby:

   Mám nejvýše 5 jablek ….

   Negace:

   Mám aspoň 5 jablek ….

   Negace:

2. Matematické kvantifikátory:

   EXISTENČNÍ KVANTIFIKÁTOR: $\exists$ ..... existuje

   $\exists!$ ..... existuje právě jeden

   $(\exists)' = \forall$

   OBECNÝ KVANTIFIKÁTOR: $\forall$ ..... pro všechna (pro každé)

   $(\forall)' = \exists$

3. Příklady výroků:

   A: Pro všechna reálná čísla *a* platí, že $a^2 \geq 0$

   $A = \{\forall a \in R; a^2 \geq 0\}$ p.h. =

   A´:

   B: Existuje alespoň jedno celé číslo, které je sudé.

   $B = \{\exists a \in Z; n \in N; a = 2.n\}$ p.h. =

   B´:

Příklady:

1. Urči, které z vět jsou výroky

   Dobrý den! *Odmaturuji?* *Číslo n(n+1) je liché*

   Nejvyšší hora Čech je Sněžka *Mám rád zmrzlinu*

   Pythagorova věta. *Úhlopříčky čtverce nejsou navzájem kolmé.*

2. Urči pravdivostní hodnoty výroků

   Matematika je věda *Každý čtverec je 4-úhelník* *Každý 4-úhelník je čtverec*

   12+4=16 *(-1).(-1)=-1* *Obsah 3-úhelníku je S=a.v*

   Každé číslo, které je dělitelné 2, je dělitelné 4

   Každé číslo, které je dělitelné 4, je dělitelné 2

3. Utvoř negaci výroků

   a) *4<5*

   b) *2-9>0*

   c) *Součin dvou záporných čísel je kladný.*

d) *Vltava je delší než Dunaj.*

e) *Rovnice x+1=5 má 1 kořen.*

f) *Mám ostrý nůž.*

g) *Objem krychle je* $V=a^3$.

4. Neguj výroky

a) *Daný trojúhelník má alespoň jednu stranu delší než 3 cm.*

b) *Rovnice má alespoň tři řešení.*

c) *Nejvýše tři rovnice mají kladný kořen.*

d) *Právě čtyři trojúhelníky mají stejný obsah.*

e) *Číslo A a číslo B jsou prvočísla.*

f) *Daný počet je větší než 7 nebo menší než 3.*

g) *Jestliže je číslo sudé, je dělitelné dvěma.*

h) *Nedívám se z okna a počítám.*

i) *Koupím salám když nebude šunka.*

j) *Existuje reálné číslo větší nebo rovno pěti.*

k) *Pro všechna přirozená čísla x platí: x>0.*

l) $\forall x \in Z : 2x = 10$

m) $\exists k \in Z^+ : k$ *je sudé*

n) $\forall x \in R : x \geq 0$

o) $\exists x \in R : 4 / x$

5. Utvořte $A \Rightarrow B, A' \Rightarrow B', B \Rightarrow A, B' \Rightarrow A'$

a) *A: Číslo x<0* *B: Číslo x<3*

$A \Rightarrow B$

$A' \Rightarrow B'$

$B \Rightarrow A$

$B' \Rightarrow A'$

b) *A: Číslo končí nulou* *B: Číslo je sudé*

$A \Rightarrow B$

$A' \Rightarrow B'$

$B \Rightarrow A$

$B' \Rightarrow A'$

c) *A:* $a^2 = b^2$ *B:* $a = b$

$A \Rightarrow B$

$A' \Rightarrow B'$

$B \Rightarrow A$

$B' \Rightarrow A'$

d) *A: Trojúhelník je pravoúhlý* *B: Pro strany trojúhelníku platí* $a^2 + b^2 = c^2$

$A \Rightarrow B$

$A' \Rightarrow B'$

$B \Rightarrow A$

$B' \Rightarrow A'$

6. Vytvoř negace výroků:

a) *Přijde Petr nebo Pavel.*

b) *Když přijde Petr, přijde Jan.*

c) *Karel přijde právě tehdy, když přijde Pavel.*

7. Najdi kvantifikátor a napiš negaci výroků:

a) *V krabici je nejvýše 6 čokolád.*

b) *Je nás méně než 5.*

c) *Padne 7 branek.*

d) *Každý trojúhelník je pravoúhlý.*

e) *V množině N existuje číslo sudé.*

f) *Pro každé reálné číslo x platí,* $x^2 \geq 0$.

g) *Přijdu v 6.*

8. Rozhodni, zda jde o tautologii:

$(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A \wedge B)$ $\qquad$ $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \wedge B')$

$[(A \vee B) \wedge A] \Rightarrow [(B \vee A) \wedge B']$ $\qquad$ $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$

$(A \vee B)' \Leftrightarrow A' \wedge B'$ $\qquad$ $(A \wedge B)' \Leftrightarrow A' \vee B'$

A	B	

A	B	

A	B	

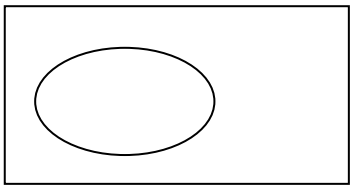
A	B	

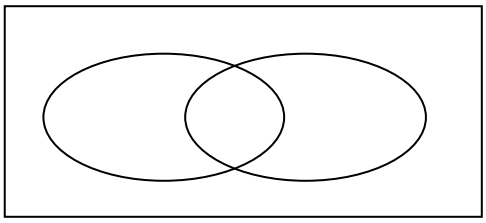
A	B	

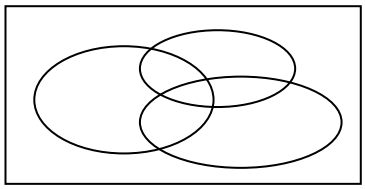
A	B	

Vennovy diagramy:

Schémata, která slouží ke grafickému znázornění množin

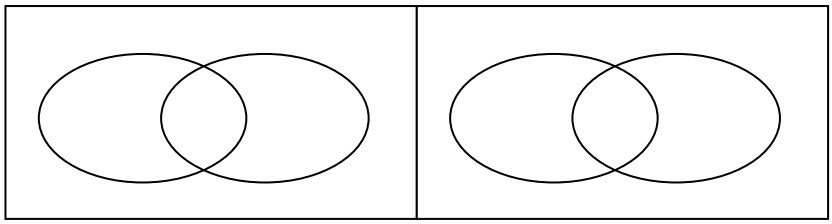




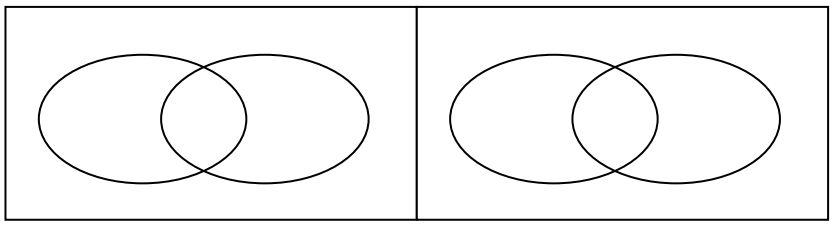


1. Pomocí Vennova diagramu ověř:

$(A \cap B)' = A' \cup B'$

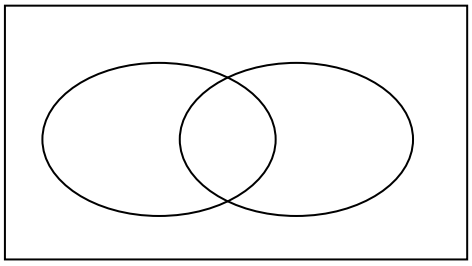


$(A - B) = (A \cup B) \cap B'$

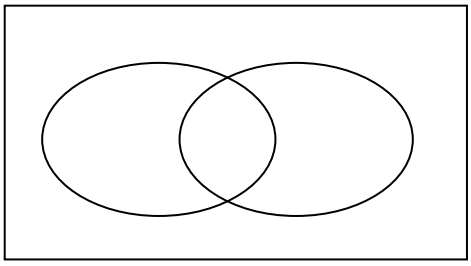


2. Pomocí Vennova diagramu zjednoduš:

$(A \cup B) \cap (A - B) =$



$(A - B) \cup (A \cap B) =$



3. Pomocí Vennova diagramu řeš slovní úlohy:

a) *Ve městě jsou 2 výstavy obrazů. V jednom dni navštívilo první z nich 320 osob, druhou z nich 216 osob, z nichž 152 navštívilo jen druhou. Kolik osob navštívilo jen první výstavu?*

b) *Ve škole jsou 3 zájmové kroužky: fotografický, motoristický, šachový. Každý žák ve třídě chodí do některého z nich. Do fotograf. chodí 16, do motor. 17 a do šachového 14 žáků. 8 chodí do fotograf. i motor. současně. 6 do fotograf. i šachového, 4 do motorist. i šachového. 3 žáci chodí na v šechny tři kroužky. Kolik žáků je ve třídě.Dvanáct žáků ze 7.B chodí na sportovní potápění a 10 na softball. Ve třídě je 25 žáků, z toho jich 7 nesportuje vůbec. Kolik softbalistů chodí také na sportovní potápění?*

c) *Dvanáct žáků ze 7. B chodí na sportovní potápění a 10 na softball. Ve třídě je 25 žáků, z toho jich 7 nesportuje vůbec. Kolik softbalistů chodí také na sportovní potápění?*

d) *V ozdravovně se 17 lidí léčí s astmatem, 5 z nich spolu s dalšími 10 navíc má problémy s obezitou, 8 pacientů přijelo kvůli obtížím páteře a manželé Novákovi mají všechny uvedené obtíže. Kolik lidí je v ozdravovně, jestliže víme, že další pacienti s obtížemi páteře nemají jiné problémy?*

e) *Z 500 dotázaných lidí 466 uvedlo, že mají doma televizor. 106 lidí sleduje pouze Českou televizi. Pouze primu sleduje 10 lidí. Všechny tři televize sleduje 320 lidí. Lidé, kteří sledují Novu, sledují všechny tři stanice. Kolik je lidí sledujících Českou televizi a zároveň Primu?*

VÝRAZY

Základní pojmy:

- Algebraický výraz, definiční obor výrazu, úpravy výrazů, operace s výrazy
- Lomené výrazy
- Vzorce pro 2. a 3. mocninu

Opakování:

- Úpravy jednoduchých výrazů, podmínky řešitelnosti

Výrazy: ČÍSELNÝ VÝRAZ … konstanta, 2+3, 5.7=35, …
ALGEBRAICKÝ VÝRAZ … proměnná, konstanta, vzorce
$2x+3$, $11x^2+5y$, $S = r^2$, …
LOMENÉ VÝRAZY … proměnná ve jmenovateli

Definiční obor výrazu = Množina všech hodnot, pro které má výraz smysl

- *Lomené výrazy* – nesmíme dělit 0 $\frac{1}{10x-5} \Rightarrow 10x-5 \neq 0$
- *Výrazy s odmocninou* – pod odmocninou nesmí být záporné číslo $\sqrt{10x-5} \Rightarrow 10x-5 \geq 0$

Úpravy výrazů:

- *Dosazování do výrazu* **–** dosadíme za proměnnou konkrétní čísla
- *Rozklad výrazu* **– vytýkáním,**
  – postupným vytýkáním,
  – pomocí vzorce

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

- *Lomené výrazy* – krácení a rozšiřování – rozklad výrazu na součin
  - $\frac{18a-30}{12a^2-20a}$
  - sčítání a odčítání – převedení na společného jmenovatele
  - $\frac{2a}{2a^2-2} + \frac{3-a}{1-a} - \frac{3}{2}$
  - násobení a dělení
  - $\frac{75ab^2}{9x^2y^2} \cdot \frac{3x^3}{25a^2b}$

Příklady:

1. Číselné výrazy:

$$\frac{1}{6}-\frac{14}{31}\cdot\left(-4\frac{3}{7}\right)+\frac{11}{24}:\left(-\frac{1}{2}\right)=$$

$$\frac{4\frac{5}{6}-3:\left(\frac{13}{15}-\frac{1}{5}\right)}{2:\left(2\frac{3}{4}-\frac{1}{12}\right)}=$$

$$\frac{1\frac{3}{8}+1\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}{2\frac{1}{4}:1\frac{1}{5}}=$$

$$\frac{2\cdot\left(\frac{2}{3}-1\right)}{\frac{13}{8}-\left(0{,}25+\frac{3}{2}\right)}=$$

2. Algebraické výrazy:

a) Sčítání, odčítání mnohočlenů

$$\left(-\frac{2}{5}t+\frac{1}{3}r-2\right)+\left(5-\frac{5}{6}r+0{,}7t\right)=$$

$$(-2k+8c-1)+(2-5c)+(9k-3+4c)=$$

$$5t-[2t-(3t+2)-1]-(8-7t)=$$

$$4m-2m^2-\left[3+5\cdot\left(0{,}2m^2-m\right)+2m\right]+3=$$

Sbírka úloh pro SŠ – cvičení 1.1, 1.2, 1.3, str. 7 – 8

b) Násobení mnohočlenů

$3\cdot\left(2x^2-6x+1\right)-2\cdot\left(0{,}5x^2+2x-1\right)=$

$(3a+4)\cdot(b-3)-(3a-4)\cdot(b+3)=$

$\left(5a^2-7a+0{,}5\right)-(2a-0{,}1)^2=$

$8x-\left[2x-3\cdot(x-1)^2+2\right]-\left(x^2-3x\right)\cdot 2=$

Sbírka úloh pro SŠ – cvičení 1.5, 1.7, str. 8 – 9

c) Zjednodušte výraz a stanovte hodnotu výrazu

$3m^2-2m^3+4m+12-m^2-m^3+7-3m$ ověřte pro m = 5.

$7t^3-2t^2-11t^3+3t^2-13-2t-2\cdot(6-t)$

ověřte pro t = -2.

$4k^2-(2k+1)^2-4\cdot(k+2)$ ověřte pro k = -3.

$5v^4-3v+v^2-7v^3+4v^2-2v-2v^4+1$ ověřte pro v = 2.

Sbírka úloh pro SŠ – cvičení 1.12, str. 11

d) Dělení mnohočlenů

Sbírka úloh pro SŠ – cvičení 1.13, 1.14, 1.15, 1.17, str. 12 – 14

e) Vypočtěte

$(3x + 4)^2 =$

$\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)^2 =$

$(7x - 5y)^2 =$

Sbírka úloh pro SŠ – cvičení 1.19, 1.21, str. 14-15

f) Vypočtěte pomocí vzorce

$(m^3+n^3) : (m+n)=$

$(8a^3-1) : (2a-1)=$

$(x^3+1) : (x+1)=$

$(a^3-1) : (a-1)=$

$(x^3+8) : (x+2)=$

$(n^3-27) : (n-3)=$

Sbírka úloh pro SŠ – cvičení 1.20, str. 15

g) Nahraďte □, aby platila rovnost:

$(a + \square)^2 = \square + 4ab + \square$ $\quad (\square - 3b)^2 = 4a^2 - \square + \square$ $\quad (\square - 5y)^2 = \square - 30xy + \square$

$(\square - 4xy)^2 = \square + 9y^2$ $\quad (\square)^2 = 25m^2 - 30mn + \square$ $\quad (\frac{1}{2}x - \square)^2 = \square + \frac{1}{9}y^2$

Sbírka úloh pro SŠ – cvičení 1.24, str. 16

h) Rozložte na součin (kde je třeba užijte vzorec)

$9-12x+4x^2$ $\qquad a^6-4a^3b^2+4b^4$

$4x^2y^2+12x^3y^3+9x^4y^4$

$9x^2+6x-4a^2+1$

$a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3$

$16a^4b^4-81$

12abc – 12a

7a – 21 + 6b – 2ab

$x^3 - 5x^2 - xy^2 + 5y^2$

$4u^2 + 9v^2 - 12uv - 1$

4x + 4y + xa + ya

7a . (5x + 3y) + 3y + 5

Sbírka úloh pro SŠ – cvičení 2.3, 2.4, 2.5, 2.8, str. 18 – 20

3. **Lomené výrazy:**

a) Určete podmínky výrazu

$$\frac{3+x}{x^3-xy^2}$$

$$\frac{a^2-16a+64}{a^2-64}$$

$$\frac{5}{1-(x+2)^2}$$

$$\frac{7}{36y-4y^3}$$

Sbírka úloh pro SŠ – cvičení 3.2, 3.3, str. 24 – 25

b) Zkraťte zlomky

$$\frac{8y-2y^3}{3y^2-12}$$

$$\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$$

$$\frac{2x^2-18}{27-18x+3x^2}$$

Sbírka úloh pro SŠ – cvičení 3.4, 3.5, 3.6, str 25- 26

c) Sečtěte zlomky

$$\frac{3a}{1-a}+\frac{3a}{a+1}-\frac{6}{1-a^2}$$

$$\frac{1}{2m-4}+\frac{1}{2m+4}+\frac{4m}{16-4m^2}$$

$$\frac{x+9}{x^2-9}-\frac{5}{x-3}-\frac{x+1}{2x+6}$$

$$\frac{x+1}{1-x}-\frac{1-x}{x+1}-\frac{(1-x)^2}{x^2-1}$$

Sbírka úloh pro SŠ – cvičení 3.9, 3.10, 3.12, str 27- 30

d) Násobte zlomky

$$\frac{5p^2-pq^2}{p^3q}\cdot\frac{5p^2q}{5p-q^2}$$

$$\frac{2x^2-4xy+2y^2}{6x^2-6xy}\cdot\frac{3x+3y}{bx^2-by^2}$$

$$\left(3a-\frac{3a}{a+1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3a^2}\right)-\frac{2a^2}{a+1}$$

$$\frac{6a-2\cdot(a-2)}{(a-2)\cdot(1+a)}$$

Sbírka úloh pro SŠ – cvičení 3.13 - 3.16, str 30 - 32

e) Dělte zlomky

$$\frac{ab-b^2}{a}:\frac{ax-bx-b+a}{a^2-ab}$$

$$\left(1-\frac{a^2}{a^2-b^2}\right):\left(\frac{a}{a}-\frac{a}{a-b}\right)$$

$$\left(\frac{a+b}{a}-\frac{a+b}{b}\right):\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$$

$$\left(2-\frac{5}{6-x}\right):\frac{14-4x}{2x^2-72}$$

Sbírka úloh pro SŠ – cvičení 3.18, 3.19, 3.20, str 33 - 35

MOCNINY A ODMOCNINY

Základní pojmy:

- Pravidla pro počítání s mocninami
- Zápis čísla $a.10^n$
- Pravidla pro počítání s odmocninami
- Mocniny s racionálním exponentem

Opakování:

- Úpravy výrazů, vzorce pro 2. a 3. mocninu

Mocniny: a^n ..... a – základ mocniny

n – exponent

$a^0=1$ (0^0 *není definované*)

Vzorce:

$a^m.a^n = a^{m+n}$ .....

$(a^m)^n = a^{m.n}$ .....

$(a.b)^n = a^n.b^n$ .....

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ .....

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ...

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ ...

Žádné věty neplatí pro sčítání a odčítání mocnin.

Zápis čísla $a.10^n$ $a \in N; 1 \le a < 10$

přehlednější zápis, zjednodušené počítání

Hmotnost Země: 6 000 000 000 000 000 000 000 000 kg = kg

Hmotnost elektronu: $9{,}1.10^{-31}$ kg = kg

Násobení a dělení:

$3.10^5.4.10^7 = 3.4.10^5.10^7 = 12.10^{12} = 1{,}2.10^{13}$

$6.10^{-4} : 3.10^{-5} =$

Sčítání a odčítání:

$3.10^5 + 4.10^7 = 3.10^5 + 400.10^5 = (3+400).10^5 = 4{,}03.10^7$

$4.10^{-4} - 3.10^{-5} = 40.10^{-5} - 3.10^{-5} = (40-3).10^{-5} = 3{,}7.10^{-4}$

1) Napiš ve tvaru $a.10^n$ a spočti:

a) 0,32 : 6 400 =

b) 0,006 84 : 342 =

c) $3\cdot 10^2 + 4\cdot 10 + 9\cdot 10^{-1} + 5\cdot 10^{-2} =$

d) $5\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2 + 3\cdot 10^0 + 7\cdot 10^{-1} =$

e) $\left[\dfrac{0{,}00005\cdot 160000}{(0{,}000004)^2}\right]^2 =$

f) $\dfrac{200.0{,}2.20}{0{,}8.100} =$

2) Převeďte a vyjádřete ve tvaru $a\cdot 10^n$, kde $a \in \langle 1,10)$, $n \in Z$:

a) $94{,}15km$ cm

b) $81{,}6mm$ m

c) $12{,}5cm^2$ m^2

d) $5{,}3m^3$ cm^3

Odmocniny: $\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a \quad x \in R; a \geq 0, n \in N$

a – základ odmocniny

n – odmocnitel

$\boxed{\sqrt[n]{0} = 0 \qquad \sqrt[n]{a} \geq 0, \qquad \sqrt[n]{a^2} = |a|}$

Vzorce: $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$ **...**

$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ **.....**

$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ **....**

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$ **....**

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ **.....**

mocniny s racionálním exponentem

$\sqrt[pn]{a^{pm}} = \sqrt[n]{a^m}$

Žádné věty neplatí pro sčítání a odčítání odmocnin.

Částečné odmocňování:

$\sqrt{12} = \sqrt{4.3} = \sqrt{4}.\sqrt{3} = 2.\sqrt{3}$

$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27.2} = \sqrt[3]{27}.\sqrt[3]{2} = 3.\sqrt[3]{2}$

$\sqrt{315} =$

$\sqrt[3]{48} =$

Usměrňování zlomků: odstranění odmocniny ze jmenovatele

1) $\frac{4+2\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{4+2\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}+2\sqrt{14}}{2} = \frac{2(2\sqrt{2}+\sqrt{14})}{2} = 2\sqrt{2}+\sqrt{14}$

2) $\frac{5-\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}} = \frac{5-\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}} \cdot \frac{5-\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}} = \frac{25-10\sqrt{3}+3}{25-3} = \frac{28-10\sqrt{3}}{22} = \frac{14-5\sqrt{3}}{11}$

3) $\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} =$

4) $\frac{4}{2+\sqrt{3}} =$

5) $\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} =$

6) $\frac{19\sqrt{6}}{9-2\sqrt{6}} =$

7) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} =$

8) $\frac{5\sqrt{2}+4\sqrt{3}}{5\sqrt{2}-4\sqrt{3}} =$

Příklady:

1. Upravte a napište podmínky, za kterých má výraz smysl:

$$\left(\frac{a^{-3}b}{c^{-1}d^{2}}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{c^{-2}d^{3}}{a^{-1}b^{5}}\right)^{-2} =$$

$$\left(\frac{a^{4}b^{-5}}{c^{2}d^{-3}}\right)^{-2} : \left(\frac{a^{-3}b^{-2}}{c^{-5}d^{4}}\right)^{-3} =$$

$$\left(\frac{x^{-2}y^{2}z^{-2}}{x^{0}y^{-8}}\right) : \frac{x^{2}z^{3}}{x^{-4}y^{7}} =$$

2. Vypočtěte:

$$(-6)^0 - 2\cdot 4^{-1} - 3\cdot(-2)^{-3} - 7\cdot(-5)^{-2} =$$

$$\left(\frac{3^2\cdot 5^3}{2^4\cdot 11}\right)^6 \cdot \left(\frac{3^5\cdot 5^9}{2^{11}\cdot 11^3}\right)^{-2} =$$

$$\left[6 - 4\cdot\left(\frac{5}{16}\right)^0\right]^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} - \frac{3}{4} =$$

3. Upravte a výsledek částečně odmocněte:

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^7\cdot\sqrt[3]{x^{19}}}}\ ,\ x \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{1}{a}\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}}, a > 0$$

4. Převeďte na mocniny s racionálním exponentem a upravte. Výsledek zapište ve tvaru odmocniny:

$$\sqrt[5]{\left(\frac{\sqrt{x}\cdot x^{-3}}{x^{\frac{1}{3}}}\right)^{-2}}\ ,\ x > 0$$

$$\frac{\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt{b}}{a\cdot\sqrt[4]{ab^3}} : \frac{\sqrt[3]{ab^3}}{\sqrt{a}}, x > 0$$

$$\sqrt{\frac{\sqrt{a}}{a^{\frac{2}{3}}}}\ ,\ a > 0$$

$$\sqrt[5]{\left(\frac{\sqrt{a}\cdot\frac{1}{a}}{\sqrt[3]{a}}\right)^{-3}}\ ,a>0$$

5. Zjednodušte:

$$a\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\left(a\cdot\sqrt{a}\right)^{\frac{3}{2}},\ a\geq 0$$

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\left(x^2\cdot x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}-x\cdot\sqrt[3]{x^5}\ ,\ x\geq 0$$

6. Vypočítejte:

$$10\sqrt[3]{5}-7\sqrt[3]{40}+5\sqrt[3]{135}-4\sqrt[3]{320}-2\sqrt[3]{625}$$

$$\frac{63^{\frac{1}{2}}-28^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{1}{2}}}$$

Test:

1) Celým číslem je číslo:

A/ $1{,}004\cdot\left(-\sqrt{5}\right)^2$ B/ $\frac{1}{2\cdot 5^{-2}}$ C/ $\frac{1}{0{,}036}$ D/ $\left[\frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^3}\right]^{-2}$ E/ $0{,}025\,8\cdot 10^3$

2) Hodnota výrazu $\left(0{,}04^{\frac{1}{6}}\right)^{-3}$ je:

A/ $\frac{1}{5}$ B/ 5 C/ 25 D/ 50 E/ 125

3) Výraz $\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a\sqrt[3]{a}}}$ je pro každé a > 0 roven:

A/1 B/ $\sqrt[6]{a}$ C/ $\sqrt[3]{a^2}$ D/ $\sqrt{a^3}$ E/ $\frac{1}{\sqrt[6]{a}}$

4) Pro čísla $2^{50}, 3^{30}, 5^{20}$ platí:

A/ $2^{50} \succ 3^{30} \succ 5^{20}$ B/ $3^{30} \succ 2^{50} \succ 5^{20}$ C/ $3^{30} \succ 5^{20} \succ 2^{50}$
D/ $5^{20} \succ 2^{50} \succ 3^{30}$ E/ $5^{20} \succ 3^{30} \succ 2^{50}$

5) Jestliže pro kladné číslo *x* platí $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = x^k$, pak platí číslo *k* je rovno:

A/ $\frac{7}{8}$ B/ $\frac{3}{8}$ C/ $\frac{1}{64}$ D/ $\frac{1}{8}$ E/ $\frac{3}{2}$

6) Výraz $\left(\frac{x^{-2}y^2z^{-2}}{x^0y^{-8}}\right)^{-2} : \frac{x^2z^3}{x^{-4}y^7}$ je za podmínek x ≠ 0, y ≠ 0, z ≠ 0 roven:

A/ $\frac{x^8z}{y^4}$ B/ $\frac{z}{x^2y^{13}}$ C/ $x^2y^{11}z$ D/ $\frac{y^{13}}{x^2z}$ E/ $\frac{x^2z}{y^{11}}$

7) Vzestupné uspořádání čísel $2^{800}, 3^{600}, 5^{400}, 6^{200}$ je:

A/ $6^{200} < 2^{800} < 5^{400} < 3^{600}$ B/ $2^{800} < 6^{200} < 3^{600} < 5^{400}$
C/ $5^{400} < 3^{600} < 6^{200} < 2^{800}$ D/ $3^{600} < 5^{400} < 2^{800} < 6^{200}$

8) Číslice na místě jednotek čísla $1^{2001}.2^{2001}.3^{2001}.4^{2001}.5^{2001}$ je

A/0 B/ 2 C/ 4 D/ 6 E/ 8

Řešení: 1)D 2)B 3)B 4)A 5)A 6)B 7)A 8)A